JOURNAL OF NUMBER THEORY 34, 41–53 (1990)

Zur expliziten Berechnung von Ganzheitsbasen in Strahlklassenkörpern über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper

REINHARD SCHERTZ

Mathematisches Institut der Universität Augsburg, Universitätsstraße, D-8900 Augsburg, Federal Republic of Germany

Communicated by P. Roquette

Received October 12, 1988; revised February 21, 1989

PROFESSOR CURT MEYER ZUM 70-TEN GEBURTSTAG GEWIDMET

Let K be an imaginary quadratic number field, $K(1)$ its Hilbert class field, and $K(\mathfrak{f})$ the ray class field modulo $\mathfrak{f}$ over K, where $\mathfrak{f}$ is an integral ideal in K. Using suitably normalized values of the Weierstrass $\wp$-function an explicit method is developed to construct a relative integral basis for $K(\mathfrak{f})/K(1)$. © 1990 Academic Press, Inc.

EINLEITUNG

Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, und für ein ganzes Ideal $\mathfrak{f}$ sei $K(\mathfrak{f})$ der Strahlklassenkörper modulo $\mathfrak{f}$ über K sowie $K(1)$ der Hilbertsche Klassenkörper von K. In [6] wurden mit Hilfe normierter Teilwerte der Weierstraßschen $\wp$-Funktion von der Form

$$P(\xi \mid \mathfrak{f}) = \left(\varepsilon \frac{\wp(\xi \mid \mathfrak{f})}{\sqrt[6]{\Delta(\mathfrak{f})}} \right)^e, \qquad \xi \in K \setminus \mathfrak{f}, \quad e = 1, 2, 3,$$

für alle Erweiterungen $K(\mathfrak{f})/K(1)$ relative Ganzheitsbasen konstruiert. Δ ist dabei die Diskriminante aus der Theorie der Modulfunktionen und ε eine geeignete Einheit mit $\varepsilon^6 \in K(1)$. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die sämtlichen Konjugierten von $P(\xi \mid \mathfrak{f})$ über K anzugeben.

Hierzu ist es nötig, die in der Definition von P auftretende Einheit ε, die nur bis auf einen Einheitenfaktor aus dem Hilbertschen Klassenkörper eindeutig bestimmt ist, durch Konstruktion so festzulegen, daß man sie samt ihren Konjugierten in geeigneter Weise beschreiben kann. Diese Konstruktion erfolgt gestützt auf die Sätze 2, 3 und 4 der vorliegenden Arbeit und führt in Satz 5 zu einer expliziten Formel für die Konjugierten von $P(\xi \mid \mathfrak{f})$.

0022-314X/90 $3.00

Die anschließenden Sätze 6 und 7 enthalten explizite Versionen des Hauptidealsatzes, die man für die Berechnung von Ganzheitsbasen gemäß den Sätzen 7 und 8 in [6] benötigt.

Zur Illustration sind am Ende der Arbeit einige Beispiele von relativen Ganzheitsbasen angegeben, die mit den Sätzen aus [6], gestützt auf den Satz 5 dieser Arbeit berechnet wurden.

Grundlagen und Ergebnisse

Wir benötigen zunächst einige Dinge aus der komplexen Multiplikation [1]. Im Folgenden sei

K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante d_K,

$\mathcal{O}_f$ die Ordnung zum Führer $f \in \mathbb{N}$ in K und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ die Hauptordnung,

I_f die Gruppe der eigentlichen Ideale von $\mathcal{O}_f$,

$\mathfrak{a}_f = \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_f$ das zu einem ganzen, zu f teilerfremden Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathcal{O}$ gehörige eigentliche Ideal von $\mathcal{O}_f$,

R_f der Ringklassenkörper modulo f über K,

$\sigma: I_f \rightarrow \mathrm{Gal}(R_f/K)$ der kanonische Epimorphismus,

$K(\mathfrak{f})$ der Strahlklassenkörper modulo $\mathfrak{f}$ über K mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{f}$ von K,

$\sigma(\mathfrak{c})$ der zu einem zu $\mathfrak{f}$ primen Ideal $\mathfrak{c}$ von K gehörige Artinautomorphismus von $K(\mathfrak{f})/K$. (1)

Die singulären Werte der absoluten Invarianten j und der Diskriminante Δ aus der Theorie der Modulfunktionen schreiben wir zweckmäßigerweise in der Form

$$j(\mathfrak{a}) = j\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \qquad \Delta(\mathfrak{a}) = \Delta\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] := \mathbb{Z}\alpha_1 + \mathbb{Z}\alpha_2$, $\mathrm{Im}(\alpha_1/\alpha_2) > 0$, ein eigentliches Ideal von $\mathcal{O}_f$ ist. Das Reziprozitätsgesetz für j und Δ lautet dann (vgl. [1, 3]):

Satz 1. *Für* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_f$ *gilt*

(1) $j(\mathfrak{a})$, $\Delta(\mathfrak{a})/\Delta(\mathcal{O}_f) \in R_f$,

(2) $j(\mathfrak{a})^{\sigma(\mathfrak{b})} = j(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})$, $(\Delta(\mathfrak{a})/\Delta(\mathcal{O}_f))^{\sigma(\mathfrak{b})} = \Delta(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})/\Delta(\mathfrak{b}^{-1})$.

Sei nun α Basisquotient eines eigentlichen Ideals von $\mathcal{O}_f$. Dann genügt α einer primitiven quadratischen Gleichung

$$A_\alpha X^2 + B_\alpha X + C_\alpha = 0; \qquad A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha \in \mathbb{Z}; \qquad A_\alpha > 0; \qquad ggT(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha) = 1 \tag{3}$$

mit der Diskriminante

$$D(\alpha) = B_\alpha^2 - 4A_\alpha C_\alpha = f^2 d_K. \tag{4}$$

Durch unimodulare Transformation von α kann man dabei immer erreichen, daß folgende Normierungsbedingungen erfüllt sind:

$$3 \nmid A_\alpha \quad \text{und} \quad 3 \mid B_\alpha, \tag{5}$$

$$2 \nmid A_\alpha \quad \text{und} \quad B_\alpha \equiv \begin{cases} 0 \bmod 4, & \text{falls } 2 \mid D(\alpha), \\ 1 \bmod 4, & \text{falls } 2 \nmid D(\alpha). \end{cases} \tag{6}$$

Hiermit hat man für die singulären Werte von $\gamma_2 = \sqrt[3]{j}$ und $\gamma_3 = \sqrt{j - 12^3}$ die folgenden Sätze.

SATZ 2. *Im Fall* $3 \nmid f^2 d_K$ *oder* $f^2 d_K = -3$ *gilt für alle* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_f$ *mit gemäß* (5) *normierten Basisquotienten* α, β

(1) $\gamma_2(\alpha), \gamma_2(\beta) \in R_f$,

(2) $\gamma_2(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})} = \gamma_2(\beta)$.

SATZ 3. *Im Fall* $2 \nmid f^2 d_K$ *oder* $f^2 d_K = -4$ *gilt für alle* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_f$ *mit gamäß* (6) *normierten Basisquotienten* α, β

(1) $\gamma_3(\alpha), \gamma_3(\beta) \in R_f$,

(2) $\gamma_3(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})} = \gamma_3(\beta)$.

SATZ 4. *Seien* $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ *primitive, zu* $6f$ *teilerfremde ganze Ideale in* K *der Norm* p *bzw.* q, *für die auch* $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ *primitiv ist. Seien ferner* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *Ideale aus* I_f *mit Basisquotienten* α, β, $\mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Im}(\beta) > 0$, *so daß* α/p, α/q, α/pq *und* β/p, β/q, β/pq *Basisquotienten von* $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_f$, $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_f$, $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_f\mathfrak{q}_f$ *und* $\mathfrak{b}\mathfrak{p}_f$, $\mathfrak{b}\mathfrak{q}_f$, $\mathfrak{b}\mathfrak{p}_f\mathfrak{q}_f$ *sind. Dann gilt*

(1) *Die mit der* η*-Funktion gebildete Zahl*

$$E(\alpha) := \frac{\eta(\alpha/p)\eta(\alpha/q)}{\eta(\alpha/pq)\eta(\alpha)}$$

ist eine Einheit, und es ist

$$h(\alpha) := (\gamma_2(\alpha)\gamma_3(\alpha))^{((p-1)/2)((q-1)/2)} E(\alpha) \in R_f.$$

(2) $h(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})} = h(\beta)$.

Wir benötigen den Satz 4 nur im Spezialfall $f = 1$ und wählen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ so, daß sie den Bedingungen

$$\begin{aligned} &p, q \text{ prim zu } 6, \\ &p \equiv q \equiv -1 \bmod 4, && \text{falls } 2 \mid d_K \text{ und } 3 \nmid d_K, \\ &p \equiv q \equiv -1 \bmod 3, && \text{falls } 2 \nmid d_K \text{ und } 3 \mid d_K, \\ &p \equiv q \equiv -1 \bmod 12, && \text{falls } 2 \mid d_K \text{ und } 3 \mid d_K \end{aligned} \tag{7}$$

genügen. Im Fall $ggT(d_K, 6) = 1$ leistet zum Beispiel $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = \mathcal{O}$ das Verlangte, und im Fall $ggT(d_K, 6) \neq 1$ wird (7) stets für ein $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ mit

$$p = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}} \tag{8}$$

erfüllt, sofern $d_K \neq -3, -4$ ist.

Sei nun $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2] \in I_1$ mit gemäß (5) und (6) normiertem Basisquotienten $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$, $\mathrm{Im}(\alpha) > 0$, wobei weiter noch

$$\alpha/p^s q^t \quad \text{für} \quad s, t = 0, 1 \text{ Basisquotienten von } \mathfrak{a}\mathfrak{p}^s\mathfrak{q}^t \text{ sein sollen.} \tag{9}$$

Letzteres kann man wegen $ggT(pq, 6) = 1$ durch unimodulare Transformation der Basis von $\mathfrak{a}$ unter Beibehaltung von (5) und (6) stets erreichen.

Wir setzen dann mit der obigen Bedeutung von p und q

$$\varepsilon(\alpha) := \begin{cases} \dfrac{\eta(\alpha/pq)\eta(\alpha)}{\eta(\alpha/p)\eta(\alpha/q)}, & \text{falls} \quad d_K \neq -3, -4, \\ 1, & \text{falls} \quad d_K = -3, -4, \end{cases} \tag{10}$$

und weiter wie in [6] für $\xi \in K \backslash \mathfrak{a}$

$$P(\xi \mid \mathfrak{a}) := \left(\varepsilon(\alpha) \frac{\wp(\xi \mid \mathfrak{a})\alpha_2^2}{(2\pi)^2 \eta(\alpha)^4} \right)^e \tag{11}$$

mit

$$e = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad d_K \neq -3, -4, \\ 2 & \text{für} \quad d_K = -4, \\ 3 & \text{für} \quad d_K = -3, \end{cases}$$

wobei zu beachten ist, daß $P(\xi \mid \mathfrak{a})$ von der Wahl von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ abhängig ist.

Für $\xi \in K \backslash \{0\}$ sei $o(\xi, \mathfrak{a})$ der Nenner des Ideals $\xi\mathfrak{a}^{-1}$. Man hat dann den

SATZ 5. *Es gilt*

(1) $P(\xi \mid \mathfrak{a}) \in K(\mathfrak{f})$ *mit* $\mathfrak{f} = o(\xi, \mathfrak{a})$.

(2) *Ist* $\mathfrak{c}$ *ein ganzes, zu* $\mathfrak{f}$ *teilerfremdes Ideal und sind* α *bzw.* β *gemäß* (5), (6) *und* (9) *normierte Basisquotienten von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{a}\mathfrak{c}^{-1}$ *mit* $\mathrm{Im}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\beta) > 0$, *so gilt für die mit* α *und* β *gemäß* (11) *gebildeten Zahlen*

$$P(\xi \mid \mathfrak{a})^{\sigma(\mathfrak{c})} = P(\xi \mid \mathfrak{a}\mathfrak{c}^{-1}),$$

wobei $\sigma(\mathfrak{c})$ *den zu* $\mathfrak{c}$ *gehörigen Artinautomorphismus von* $K(\mathfrak{f})/K$ *bezeichnet.*

Bemerkungen. (1) Die genaue Analyse des Beweises ergibt, daß man im Fall $d_K \neq -3$, -4 auf die Bedingung (5) bzw. (6) bzw. (5) und (6) verzichten kann, wenn $p \equiv q \equiv -1 \bmod 3$ bzw. $p \equiv q \equiv -1 \bmod 4$ bzw. $p \equiv q \equiv -1 \bmod 12$ gilt.

(2) Die numerische Berechnung der Konjugierten von $P(\xi \mid \mathfrak{a})$ wird wesentlich vereinfacht, wenn man beachtet, daß dies auch die Konjugierten von $P(\lambda\xi \mid \mathcal{O}) = P(\xi \mid \mathfrak{a})^{\sigma(\mathfrak{c})}$ sind, wobei $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\lambda$ ein ganzes, zu $\mathfrak{f}$ teilerfremdes Ideal aus der Idealklasse von $\mathfrak{a}$ ist.

Für die Berechnung von Ganzheitsbasen gemäß Satz 8 in [6] benötigen wir für ein Primideal $\mathfrak{q}$ in K eine Zahl ω aus $K(1)$ mit $\omega \approx \mathfrak{q}$. Für Primideale der Hauptklasse ist die Konstruktion von ω trivial, und für die Primideale der anderen Idealklassen gewinnt man diese Zahl nebst ihren Konjugierten aus

SATZ 6. *Sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal* 1-*ten Grades in* K *der Norm* $p \nmid 6f^2 d_K$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in I_f$ *mit Basisquotienten* $\alpha, \beta, \mathrm{Im}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\beta) > 0$, *so daß* α/p^2 *und* β/p^2 *Basisquotienten zu* $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_f^2$ *und* $\mathfrak{b}\mathfrak{p}_f^2$ *sind. Dann gilt*

(1) $k(\alpha) := \eta(\alpha/p^2)/\eta(\alpha) \in R_f$,

(2) $k(\alpha) \approx \bar{\mathfrak{p}}$,

(3) $k(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1})} = k(\beta)$.

Eine andere explizite Version des Hauptidealsatzes ist enthalten in

SATZ 7. *Sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in* K *und* $\delta \in \mathcal{O}$ *mit* $o(\delta - \zeta, \mathfrak{p}) = o(\delta, \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ *für alle Einheitswurzeln* ζ *in* K. *Dann gilt für die Relativnorm*

$$N_{K(\mathfrak{p})/K(1)}\left(\frac{1}{P(\delta \mid \mathfrak{p}) - P(1 \mid \mathfrak{p})}\right) \approx \mathfrak{p}.$$

Bemerkung. Eine Zahl δ mit den in Satz 7 geforderten Eigenschaften existiert z.B. als erzeugendes Element der primen Restklassengruppe modulo $\mathfrak{p}$ genau dann, wenn die Norm von $\mathfrak{p}$ größer als 3 im Fall $d_K \neq -3$, -4 und größer als 7 bzw. 5 in den Fällen $d_K = -3$ bzw. $d_K = -4$ ist.

Beweise der Sätze 2–7

Zu Satz 2. Definitionsgemäß ist

$$\gamma_2(z) = 12 \frac{g_2(z)}{(2\pi)^4 \eta(z)^8}, \tag{12}$$

wobei g_2 die in der Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion auftetende Eisensteinsche Reihe und η die η-Funktion bedeuten.

Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ hat man die Transformationsformel

$$\eta(Mz) = \varepsilon(M) \sqrt{cz+d}\, \eta(z), \tag{13}$$

wobei die Wurzel mit positivem Realteil zu nehmen ist. $\varepsilon(M)$ ist eine 24-ste Einheitwurzel, und normiert man M durch

$$c \geqslant 0 \qquad \text{und} \qquad d > 0, \qquad \text{falls } c = 0, \tag{14}$$

so ergibt sich leicht aus [4] die explizite Formel

$$\varepsilon(M) = \left(\frac{a}{c_1}\right) \zeta_{24}^{ab + c(d(1-a^2) - a) + 3(a-1)c_1 + \lambda(3/2)(a^2-1)} \tag{15}$$

mit $\zeta_{24} = \exp(2\pi i/24)$. Hierin ist $c_1 = \lambda = 1$ im Fall $c = 0$, und im Fall $c \neq 0$ erhält man c_1 und λ aus der Zerlegung $c = 2^\lambda c_1$, $c_1 \equiv 1 \mod 2$. (a/c_1) bedeutet das Legendresymbol.

Aus (12), (13) und (15) ergibt sich dann, daß die Funktion $\gamma_2(z/3)$ bei unimodularen Substitutionen M aus

$$\Gamma^0(9) = \left\{ N \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid N \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \mod 9 \right\} \tag{16}$$

invariant ist. Da der zu $\Gamma^0(9)$ gehörige Funktionenkörper bekanntlich durch $j(z)$ und $j(z/9)$ erzeugt wird, erhält man daraus

$$\gamma_2\left(\frac{z}{3}\right) = R\left(j(z), j\left(\frac{z}{9}\right)\right) \tag{17}$$

mit einer rationalen Funktion R, deren Koeffizienten rational sind, weil $\gamma_2(z/3)$, $j(z)$ und $j(z/9)$ eine rationale q-Entwicklung haben.

Da $\gamma_2(z/3)$ in der oberen Halbebene holomorph ist, hat der Nenner der rationalen Funktion die Produktdarstellung

$$\prod_{S \not\sim \binom{1\,0}{0\,9}} \left(j\left(\frac{z}{9}\right) - j(Sz) \right), \tag{18}$$

in der S ein Vertretersystem von zu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ inäquivalenten primitiven Matrizen der Determinante 9 durchläuft (vgl. [1]). Ein solches System ist z.B. gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \pm 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm \mu \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 1, 2, 3, 4. \tag{19}$$

Sei nun α ein gemäß (5) normierter Basisquotient von $\mathfrak{a} \in I_f$. Dann gilt (17) auch für den Funktionswert an der Stelle $z = 3\alpha$, sofern der Nenner der rationalen Funktion hier kein Nullstelle hat. Hierzu hat man im Hinblick auf (18) zu zeigen, daß $3\alpha/9 = \alpha/3$ zu allen $S(3\alpha)$ mit S au (19) unimodular inäquivalent ist. Man findet unter Beachtung von (5)

$$D(S(3\alpha)) = 9^2 D\left(\frac{\alpha}{3}\right) \quad \text{für } S = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \pm 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \pm \mu \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \ \mu = 1, 2, 4,$$
$$D(S(3\alpha)) = \begin{Bmatrix} D(\alpha/3), \text{ falls 3 prim in } K \\ \frac{1}{9} D(\alpha/3), \text{ falls 3 zerlegt in } K \end{Bmatrix} \quad \text{für } S = \begin{pmatrix} 1 & \pm 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Somit kann $S(3\alpha)$ höchstens im Fall "3 prim in K und $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \pm 3 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$" zu $\alpha/3$ äquivalent sein. Daß auch dies nicht der Fall ist, ergibt sich aus [1], Seite 21 unten, wonach $\alpha/3$ im Fall $f^2 d_K \neq -4$ zu $(\alpha \pm 1)/3$ inäquivalent ist. Im Fall $f^2 d_K \neq -4$ gilt (17) somit auch für den Funktionswert an der Stelle $z = 3\alpha$:

$$\gamma_2(\alpha) = R\left(j(3\alpha), j\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right). \tag{21}$$

Hiernach ist zunächst $\gamma_2(\alpha) \in R_{3f}$ wegen $D(3\alpha) = D(\alpha/3) = 3^2 D(\alpha)$, und da im vorliegenden Fall $(R_{3f} : R_f)$ nicht durch 3 teilbar ist, folgt sogar

$$\gamma_2(\alpha) \in R_f. \tag{22}$$

Für den Beweis der zweiten Behauptung genügt es, wenn wir nur den Fall $\mathfrak{a} = \mathcal{O}_f$ betrachten und voraussetzen, daß $\mathcal{O}_f = [\alpha, 1]$ ist. Um nun mittels (21) das Bild von $\gamma_2(\alpha)$ unter $\sigma(\mathfrak{b}^{-1})$ zu berechnen, benötigen wir eine Fortsetung von $\sigma(\mathfrak{b}^{-1})$ auf R_{3f}. Wie aus [7] hervorgeht, ist eine solche gegeben durch

$$\sigma([3\beta, 1]^{-1}). \tag{23}$$

Unter Beachtung von (5) findet man nun

$$[3\alpha, 1][3\beta, 1] = [3\beta, 1], \qquad [\alpha, 3][3\beta, 1] = [\beta, 3]. \tag{24}$$

somit folgt aus (21) und Satz 1

$$\gamma_2(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{b}^{-1})} = R\left(j(3\beta), j\left(\frac{\beta}{3}\right)\right) = \gamma_2(\beta), \tag{25}$$

und Satz 2 ist im Fall $f^2 d_K \neq -4$ bewiesen.

Im Fall $f^2 d_K = -4$ schließen wir anders. Hier genügt es, den Fall $\alpha = \sqrt{-1}$ zu betrachten, und weil K die Klassenzahl Eins hat, ist $\beta = M\alpha$ mit $M \in SL_2(\mathbb{Z})$. Aus der Normierung (5) für β erhält man dann Kongruenzen modulo 3 für die Koeffizienten von M, aus denen $\gamma_2(\alpha) = \gamma_2(\beta)$ mit Rücksicht auf die Transformationsformel (13) und (15) geschlossen werden kann. Wegen $\gamma_2(\alpha) = 12$ ist damit Satz 2 auch im Fall $f^2 d_K = -4$ beweisen.

Zu Satz 3. Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 2, wobei hier die Fälle $f^2 d_K = -3, \; -7, \; -15$ gesondert betrachtet werden müssen.

Zu Satz 4. Wir betrachten die Funktion

$$h(z) := (\gamma_2(z)\gamma_3(z))^{((p-1)/2)((q-1)/2)} \frac{\eta(z/p)\eta(z/q)}{\eta(z/pq)\eta(z)} \tag{26}$$

und findet, gestützt auf (15) für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $pq \mid b$ die Transformationsformel

$$h(Mz) = \zeta_6^{a(b/pq)(pq-1)((p-1)/2)((q-1)/2)} h(z), \qquad \zeta_6 = \exp\left(\frac{2\pi i}{6}\right). \tag{27}$$

Der bei ζ_6 auftretende Exponent ist wegen $ggT(pq, 6) = 1$ stets durch 6 teilbar. Folglich ist h bei unimodularen Substitutionen aus

$$\Gamma^0(pq) = \left\{ N \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid N \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \bmod pq \right\} \tag{28}$$

invariant. Da der zu $\Gamma^0(pq)$ gehörige Funktionenkörper durch $j(z)$ und $\Delta\left(\begin{smallmatrix} z \\ pq \end{smallmatrix}\right)/\Delta\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugt wird, erhält man daraus wie beim Beweis von Satz 2 eine Darstellung der Form

$$h(z) = R\left(j(z), \frac{\Delta\left(\begin{smallmatrix} z \\ pq \end{smallmatrix}\right)}{\Delta\left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}\right) \tag{29}$$

mit einer rationalen Funktion R, die rationale Koeffizienten hat. Der Nenner der rationalen Funktion hat die Produktdarstellung

$$\prod_{S \not\sim \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & pq\end{smallmatrix}\right)} \left(\frac{\Delta\left(\frac{z}{pq}\right)}{\Delta\left(\frac{z}{1}\right)} - \frac{\Delta\left(S\left(\frac{z}{1}\right)\right)}{\Delta\left(\frac{z}{1}\right)}\right), \tag{30}$$

in der S ein Vertretersystem von zu $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & pq\end{smallmatrix}\right)$ inäquivalenten primitiven Matrizen der Determinante pq durchläuft (vgl. [1]). (29) gilt auch für den Funktionswert an der Stelle $z=\alpha$, sofern der Nenner hier keine Nullstelle hat. Letzteres folgt aber aus (30) unter Beachtung der in [1] bestimmten Faktorisierung der Δ-Quotienten, wonach

$$\begin{aligned} &(pq)^{12}\frac{\Delta\left(\frac{\alpha}{pq}\right)}{\Delta\left(\frac{\alpha}{1}\right)} \approx (\overline{\mathfrak{pq}})^{12} \\ &(pq)^{12}\frac{\Delta\left(S\left(\frac{\alpha}{1}\right)\right)}{\Delta\left(\frac{\alpha}{1}\right)} \not\approx (\overline{\mathfrak{pq}})^{12} \qquad \text{für} \quad S \not\sim \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & pq\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

gilt. Aus (29) und Satz 1 folgt nun sofort

$$h(\alpha) \in R_f \qquad \text{und} \qquad h(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{ab}^{-1})} = h(\beta). \tag{32}$$

Bemerkung. Die Schlußweise im Beweis von Satz 4 liefert ähnliche Resultate auch unter der schwächeren Voraussetzung $ggT(pq, f)=1$, wobei dann $ggT(pq, 6) \neq 1$ möglich ist. So ist zum Beispiel die Aussage von Satz 4 auch im Fall $p=q=3$ richtig, wenn man noch zusätzlich voraussetzt, daß α/p^3, β/p^3 Basisquotienten von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_f^3$ bzw. $\mathfrak{b}\mathfrak{p}_f^3$ sind. Dasselbe gilt im Fall $p=q=2$, wenn man außerdem noch $E(\alpha)$ und $h(\alpha)$ durch

$$\hat{E}(\alpha) = \left(\frac{\eta(\alpha/2)^2}{\eta(\alpha/4)\eta(\alpha)}\right)^4 \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(\alpha) = \hat{E}(\alpha)\gamma_2(\alpha)\gamma_3(\alpha) \tag{33}$$

ersetzt. Im Fall $p=2$, $q=3$ muß man $E(\alpha)$ und $h(\alpha)$ durch

$$\hat{E}(\alpha) = \left(\frac{\eta(\alpha/2)\eta(\alpha/3)}{\eta(\alpha/6)\eta(\alpha)}\right)^2 \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(\alpha) = \hat{E}(\alpha)\gamma_2(\alpha)\gamma_3(\alpha) \tag{34}$$

ersetzen und verlangen, daß $\alpha/36$, $\beta/36$ Basisquotienten von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_f^2\mathfrak{q}_f^2$ bzw. $\mathfrak{b}\mathfrak{p}_f^2\mathfrak{p}_f^2$ sind.

In einigen Fällen kann man diese Bildungen auch zur Konstruktion von $\varepsilon(\alpha)$ in (11) benutzen. Dies gilt zum Beispiel für $p=q=3$ im Fall "2 verzweigt und 3 zerlegt" und für $p=q=2$ im Fall "3 verzweigt und 2 zerlegt". Hierbei ist allerdings der Exponent 4 bei $\hat{E}(\alpha)$ aus numerischer Sicht störend.

Zu Satz 5. Bezeichnet τ_e die zur Ordnung mit 2e Einheitswurzeln gehörige Webersche τ-Funktion (vgl. [1]), so hat man analog zu (21) in [6] die Beziehung

$$P(\xi \mid \mathfrak{a}) = \left(-\frac{1}{12}\right)^e G(\alpha)\tau_e(\xi \mid \mathfrak{a}) \tag{35}$$

mit

$$G(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon(\alpha)}{\gamma_2(\alpha)\gamma_3(\alpha)}, & \text{falls} \quad d_K \neq -3, -4, \\ \dfrac{\varepsilon(\alpha)^2}{\gamma_2(\alpha)^2}, & \text{falls} \quad d_K = -4, \\ \dfrac{\varepsilon(\alpha)^3}{\gamma_3(\alpha)}, & \text{falls} \quad d_K = -3. \end{cases}$$

Aufgrund der Voraussetzungen über α und β folgt nun aus den Sätzen 2, 3 und 4

$$G(\alpha), G(\beta) \in K(1) \qquad \text{und} \qquad G(\alpha)^{\sigma(\mathfrak{c})} = G(\beta). \tag{36}$$

Da außerdem nach [1] $\tau_e(\xi \mid \mathfrak{a})$ in $K(\mathfrak{f})$ liegt und $\tau_e(\xi \mid \mathfrak{a})^{\sigma(\mathfrak{c})} = \tau_e(\xi \mid \mathfrak{a}\mathfrak{c}^{-1})$ gilt, erhält man dann aus (36) die Behauptungen von Satz 5.

Zu Satz 6. Wegen $p \neq 2, 3$ ist $p^2 \equiv 1 \bmod 24$, und aus der Transformationsformel (13) und (15) für η folgt hiernach, daß

$$\frac{\eta(z/p^2)}{\eta(z)} \tag{37}$$

unter allen Transformationen aus $\Gamma^0(p^2)$ invariant ist. Daraus erhält man wie beim Beweis von Satz 4 die erste und dritte Aussage von Satz 6. Die zweite Aussage ist in [1] enthalten.

Zu Satz 7. Der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus der Formel (12) in [6], wobei die Gradformel (15) und der Satz 3 in [6] zu beachten ist.

Beispiele

Im Folgenden bezeichne d_K die Diskriminante von K, $\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})}$ die Hauptordunung von $K(\mathfrak{f})$, sowie Θ eine Nullstelle der jeweils angegebenen irreduziblen Gleichung. Besonders zu beachten ist dabei das Beispiel (13), wo in einem durch die Sätze aus [6] nicht erfaßten Fall eine Potenzganzheitsbasis angegeben wird.

(1) $d_K = -3, \qquad \mathfrak{f} = (5+\sqrt{-3}), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 3,$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[\Theta]$$

$$X^3 + \frac{9+\sqrt{-3}}{2} X^2 + \frac{1-5\sqrt{-3}}{2} X - 1$$

(2) $d_K = -3, \qquad \mathfrak{f} = (3\sqrt{-3}), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 3,$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}\left[\frac{1}{\Theta}\right]$$

$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-3}\,\Theta + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-3}\,\Theta^2$$

$$X^3 + 2\sqrt{-3}\,X^2 + 3X - \frac{\sqrt{-3}}{3}$$

(3) $d_K = -4, \qquad \mathfrak{f} = (1+i)(3+2i), \qquad i = \sqrt{-1}, \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 3,$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[\Theta]$$

$$X^3 - (2-4i)X^2 - (4+i)X - 1$$

(4) $d_K = -4, \qquad \mathfrak{f} = (1+6i), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 9,$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}\left[\frac{1}{\Theta}\right]$$

$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)}(1+6i)\Theta + \cdots + \mathcal{O}_{K(1)}(1+6i)\Theta^8$$

$$X^9 - (3-8i)X^8 - (31-4i)X^7 - (43+50i)X^6 + (31-83i)X^5$$

$$+ (75-5i)X^4 + (17+36i)X^3 - (9-9i)X^2 - (2+i)X + \frac{1-6i}{37}$$

(5) $d_K = -7, \qquad \mathfrak{f} = \left(\dfrac{-7+\sqrt{-7}}{2}\right), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 3$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[\Theta]$$

$$X^3 + \frac{1-\sqrt{-7}}{2} X^2 - \frac{1+\sqrt{-7}}{2} X - 1$$

(6) $d_K = -7, \qquad \mathfrak{f} = (\sqrt{-7}), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 3$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}\left[\frac{1}{\Theta}\right]$$

$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-7}\,\Theta + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-7}\,\Theta^2$$

$$X^3 - \sqrt{-7}\,X^2 - 2X + \frac{\sqrt{-7}}{7}$$

(7) $d_K = -20, \qquad \mathfrak{f} = \sqrt{-5}\,[3, 1+\sqrt{-5}], \qquad (K(\mathfrak{f})\colon K(1)) = 4$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[\Theta]$$

$$X^4 + \tfrac{1}{2}(1 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{-5} - \sqrt{-1})X^3$$
$$+ (\sqrt{5} + \sqrt{-5} + 7\sqrt{-1})X^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(-3 - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{-5} + 7\sqrt{-1})X - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$$

(8) $d_K = -20, \qquad \mathfrak{f} = (4), \qquad (K(\mathfrak{f})\colon K(1)) = 4$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}\left[\frac{1}{\Theta}\right]$$
$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)}\alpha\Theta + \cdots + \mathcal{O}_{K(1)}\alpha\Theta^3, \qquad \alpha = 1 + \sqrt{-1}$$

$$X^4 + (3 + \sqrt{5} + \sqrt{-5} + \sqrt{-1})X^3 + (3 + 6\sqrt{-1})X^2$$
$$+ (-5 - 2\sqrt{5} + \sqrt{-5} + 2\sqrt{-1})X$$
$$- \tfrac{1}{2}(2 + \sqrt{5} + \sqrt{-5} + 2\sqrt{-1})$$

(9) $d_K = -24, \qquad \mathfrak{f} = (-2 + \sqrt{-6}), \qquad (K(\mathfrak{f})\colon K(1)) = 2$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[\Theta]$$

$$X^2 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{-6} - 2\sqrt{-3})X$$
$$- \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{-6} + \sqrt{-3})$$

(10) $d_K = -24, \qquad \mathfrak{f} = (3), \qquad (K(\mathfrak{f})\colon K(1)) = 3$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}\left[\frac{1}{\Theta}\right]$$
$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-3}\,\Theta + \mathcal{O}_{K(1)}\sqrt{-3}\,\Theta^2$$

$$X^3 + \frac{1}{2}(6 + 3\sqrt{2} - \sqrt{-6} - 2\sqrt{-3})X^2$$
$$+ \frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{-6} - 4\sqrt{-3})X - \frac{1}{\sqrt{-3}}(3 + 2\sqrt{2})$$

(11) $d_K = -163, \qquad \mathfrak{f} = (2), \qquad (K(\mathfrak{f})\colon K(1)) = 3$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)}[2\Theta]$$

$$X^3 + 2^2 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29X - \frac{7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127}{4}\sqrt{-163}$$

(12) $d_K = -163, \qquad \mathfrak{f} = (3), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 4$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)} 3\Theta + \mathcal{O}_{K(1)} 3\Theta^2 + \mathcal{O}_{K(1)} 3\Theta^3$$

$$X^4 + 2^3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29 X^2 - 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 127 \sqrt{-163}\, X$$
$$- \tfrac{1}{3} \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2$$

(13) $d_K = -19, \qquad \mathfrak{f} = (\sqrt{-19}), \qquad (K(\mathfrak{f}) : K(1)) = 9$

$$\mathcal{O}_{K(\mathfrak{f})} = \mathcal{O}_{K(1)} \left[\frac{1}{\Theta} \right], \qquad \Theta = P(1 \mid \mathfrak{f}),\ p = q = 1,$$
$$= \mathcal{O}_{K(1)} + \mathcal{O}_{K(1)} \sqrt{-19}\, \Theta + \cdots + \mathcal{O}_{K(1)} \sqrt{-19}\, \Theta^8$$

$$X^9 - 2\sqrt{-19}\, X^8 - 23 X^7 + 4\sqrt{-19}\, X^6 - 22 X^5 + 12\sqrt{-19}\, X^4$$
$$+ 40 X^3 - 3\sqrt{-19}\, X^2 - X - \frac{1}{\sqrt{-19}}$$

Literatur

1. Deuring, Die Klassenkörper der komplexen Multiplikation, *in* "Enzykl. d. Math. Wiss.," Bd. I/2, Heft 10, Teil II.
2. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation I, II, *Crelle* **157** (1927), 115–139; **165** (1931), 64–88.
3. Kubert-Lang, Modular units, *Grundlehren Math. Wiss.* **244**, 1981.
4. Meyer, Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen, *J. Reine Angew. Math.* **198** (1957), 143–203.
5. Ramachandra, Some applications of Kroneckers limit formulas, *Ann. Math.* **80** (1964), 104–148.
6. Schertz, Konstruktion von Potenzganzheitsbasen in Strahlklassenkörpern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.* **398** (1989), 105–129.
7. Schertz, Die singulären Werte der Weberschen Funktionen f, f_1, f_2, γ_2, γ_3, *J. Reine Angew. Math.* **286/287** (1976), 46–74.
8. Söhngen, Zur komplexen Multiplikation, *Math. Ann.* **111** (1935), 302–328.
9. Weber, "Lehrbuch der Algebra III," Chelsea, New York, 1961.